# 论“五度相生律”与“纯律”中的两种半音

赵玉卿

**摘要：**“半音”在音乐理论与实践中具有非常重要的作用，常被认为是传统音乐最小的音程单位，由于受到十二平均律的影响，有不少人会产生所有律制中的“半音”都是相同的这样的认识。不同律制中有不同的半音，甚至同一律制中还存在着同名半音和异名半音的区别。在五度相生律与纯律两种律制中存在着“同名半音”与“异名半音”两种不同的半音，文章主要采用数学计算的方法论述这两种半音的产生过程以及它们的区别。

**关键词：**五度相生律；纯律；同名半音；异名半音；纯律大音阶；纯律小音阶

**作者简介：**赵玉卿，男，副教授，上海音乐学院博士生。（浙江传媒学院　音乐学院，浙江　杭州，310018）

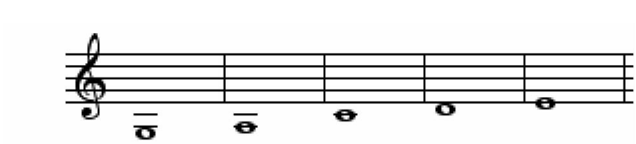
**中图分类号：**J612　　　**文献标识码：**A　　　**文章编码：**1008－6552（2010）01－0104－07

十二平均律中共有十二个半音，不管是“同名半音”还是“异名半音”，每个半音的音分值都相等，这已成为我们最熟知的基本常识了。但是，在五度相生律和纯律中，不但出现了“同名半音”和“异名半音”的区别，而且这两种半音在这两种律制中却又是各不相同的，但这两种半音的实质和在律制中的重要性却往往被忽略，本文主要运用数学计算的方法，论述这两种半音的形成、实质以及在律制中的重要意义。

## 一、五度相生律中的两种半音

### （一）五度相生律的产生过程

中国最早的律学理论产生于春秋战国时期，这一时期最早发现了三分损益律。《管子·地员篇》载：“凡将起五音，凡首，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄钟小素之首，以成宫。三分而益之以一，为百有八，为徵。不无有三分而去其乘，适足以是生商。有三分而复于其所，以是成羽。有三分而去其乘，适足以是成角。”[1]按照《管子》的这则史料记载，用三分损益法以宫为起始律，依次产生出徵、商、羽、角共五音，按照音高顺序排列为（以中央 c 为宫为例）：



《管子·地员》的生律法即是以宫为首，三分益一求得其下方四度律徵，再三分损一求得徵的上方五度律商等等，是一种“下四度上五度”方法生律的。这就是我国的“三分损益律”。

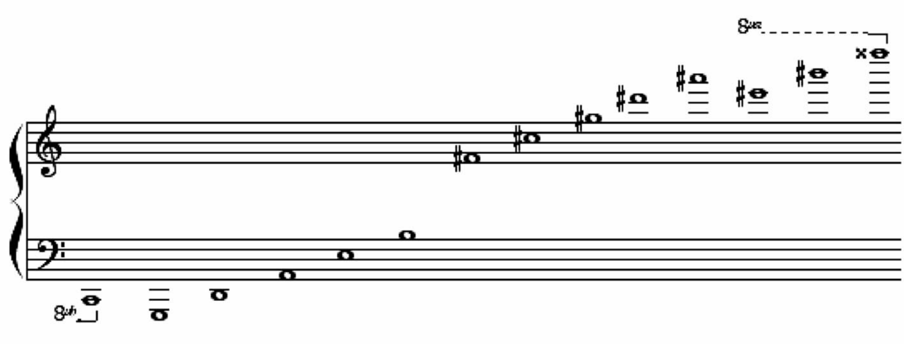
五度相生律产生于公元前六世纪，是由毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 582—500）发现的，故也称为毕达哥拉斯律（Pythagorean Intonation）。五度相生律是按照纯五度关系生律的，它与三分损益律方法不同，但结果基本上是相同的（只有 f 音不同）。

五度相生律是一种不平均律，它的高八度律回不到起始律的比数上，也就是中国三分损益律所谓的“黄钟不能还原”。那么五度相生律是如何产生的？为何不能回到起始律呢？

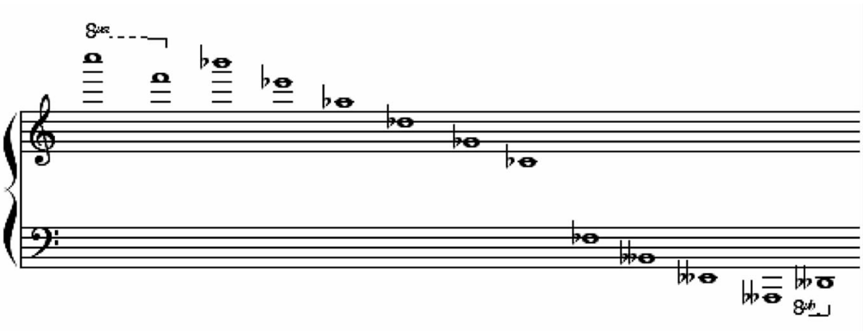
五度相生律的产生过程：

五度相生律就是从一个音出发，不断地向上或向下纯五度音程关系迭加，在七个八度范围内迭加十二次而得，见以下谱例：

向上方纯五度生律：



向下方纯五度生律：



将以上各音放于一个八度内按照音高顺序排列，向上方五度与向下方五度生律分别如下：

五度相生律，要迭加十二个纯五度，共包括七个八度的宽度，才能形成十二个半音。从理论上讲，七个八度与十二个纯五度的频率比是不相同的。看以下计算：

七个八度的频率比为：$2^7 = 128$

十二个纯五度的频率比为：$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} = 129.746337890625$

从以上的计算数值来看，七个八度与十二个纯五度的频率比是不相同的，两者相差 1.746337890625，故十二个纯五度的音高要高于七个八度的音高。用音分值表示为：

$$\frac{531441}{4096} \div 128 \times 3986.31371386483481744438331539 38$$

$$= 23.46001038464901293384079284 8591$$

此音差称毕达哥拉斯音差。因此，五度相生律经过纯五度的迭加，到第十二次时的 $^{\#}$b 音时，不但回不到起始律 c 上，而且比起始律高一个毕达哥拉斯音差。

运用五度相生的方法生律，其第十二律永远返回不到起始律，以下公式可以很确定的证明这一点：

我们知道，一个八度的频率比为$\frac{2}{1}$，一个纯五度的频率比为$\frac{3}{2}$，如果按五度相生的方法所产生的十二律能回到起始律，那么，以下算式一定能够成立：

$$\because \left(\frac{2}{1}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{y}$$

$$\therefore \lg\left(\frac{2}{1}\right)^{x}=\lg\left(\frac{3}{2}\right)^{y}$$

$$\therefore x\ \lg\left(\frac{2}{1}\right)=y\lg\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{y}{x}=\frac{\lg 2}{\lg\frac{3}{2}}=\frac{0.30102999566398119521373889472449}{0.17609125905568124208128900853062}$$

$$=1.7095112913514547769761902621801$$

以上算式的结果不等于整数，故八度的迭加与五度的迭加永远不能重合在一起，因此，五度相生律是没有办法回到起始律的。

（二）五度相生律中的两种半音

我们来看，如以 C 为起始律，上下按纯五度次序所生各音见下表：

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | g | d | a | e | b | #f | #c | #g | #d | #a | #e | #b |
| $^{bb}d$ | $^{bb}a$ | $^{bb}e$ | $^{bb}b$ | $^{b}f$ | $^{b}c$ | $^{b}g$ | $^{b}d$ | $^{b}a$ | $^{b}e$ | $^{b}b$ | f | c |

按照此表，求某律的频率比，要看此律升高了几个五度，如升高一个五度，其频率比乘以$\frac{3}{2}$，如升高 n 个五度，其频率比乘以$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$，然后再作八度的移动，移低一个八度，除以 2，移低 n 个八度，就除以 $2^{n}$。相反，如某律移低一个五度，其频率比除以$\frac{3}{2}$，如降低 n 个五度，就除以$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$，然后作八度移动，移高一个八度乘以 2，移高 n 个八度，就乘以 $2^{n}$。

五度相生律大音阶的产生法如下表：

| 序数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 音名 | c | d | e | f | g | a | b | $c^{1}$ |
| 产生法 | 1 | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}{2}$ | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{4}}{2^{2}}$ | $\frac{2}{3}\times 2$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}{2}$ | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{5}}{2^{2}}$ | 2 |
| 与主音的频率比 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | $\frac{2}{1}$ |
| 相邻两音间的频率比 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | |
| 相邻两音间的音分值 | 204 | 204 | 90 | 204 | 204 | 204 | 90 | |

从上表中可清楚地看出各音级的产生过程、音级之间的频率比及音分值，五度相生律大音阶只有两种音程，

即全音和半音，全音实际上是一律与另一个连续两个五度关系迭加后再降低一个八度的律所构成，即$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}$。半音实际上是五个下行的五度，然后再上行三个八度而得，即$\left(\frac{2}{3}\right)^5\times 2^3=\frac{256}{243}$。

五度相生律所得的全音为大全音（204 音分），而半音为小半音（90 音分），两个半音相加值小于一个全音值（$90+90<204$）。

根据五度相生律的生律方法，其所产生的半音有两种，一种是“异名半音”现在的乐理称之为“自然半音”；另一种是“同名半音”，乐理书称之为“变化半音”。那么，“同名半音”与“异名半音”有什么不同？它们是如何产生的？它们之间还隐含着什么乐律奥秘？

上表中我们能看出，e ~ f、b ~ c 是半音，它们是“异名半音”，异名半音的音分值约为 90 音分，即：

$$\log\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\times 2^3\right]\times(1200\div\log2)=90.2249956730629112775663363 13231$$

“异名半音”还有#g ~ a、#f ~ g 等。

而“同名半音”即 c ~ #c 、g ~ #g 等，其产生法是由七个五度迭加，然后下行四个八度而成，即：$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7}{2^4}=\frac{2187}{2048}$

其音分值为：$\log\frac{2187}{2048}\times(1200\div\log2)=113.685006057711924211407129161 82$

五度相生律同名半音和异名半音之间的频率比为：

$\frac{2187}{2048}\div\frac{256}{243}=\frac{531441}{524288}$，这个音差即是“毕达哥拉斯音差”，其音分值约为 24 音分。故同名半音比异名半音约大一个最大音差 24 音分。

如以 C—$^{b}$D—$^{\#}$C—D 为例，在五度相生律中，C—$^{b}$D 这个异名半音的音分值要比 C—$^{\#}$C 这个同名半音的要小 24 音分，从音级倾向性的强弱来讲，$^{b}$D 要倾向于 C，而$^{\#}$C 则倾向于 D：

C $\leftarrow$ $^{b}$D　　$^{\#}$C $\rightarrow$ D　　$^{b}$D $\neq$ $^{\#}$C。

这种同名半音的音分值大于异名半音是五度相生律遇到的很难解决的问题，因此，五度相生律的这个特点，使它会带来一种旋律倾向的动感，特别适应于单音体音乐，符合人的听觉习惯。

## 二、纯律中的两种半音

### （一）纯律大音阶

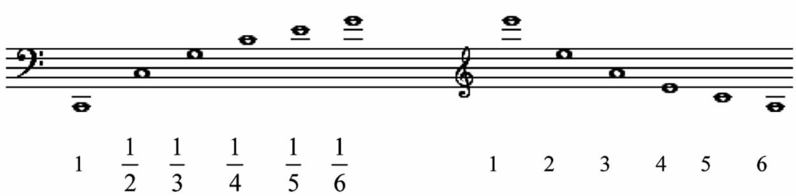
五度相生律由于按照音的纯五度关系生律，在音的先后结合上自然谐和，因而适用于“单音体”音乐。西方从九世纪起，多声部音乐开始萌芽，（奥尔加农、孔都可图斯等），初期的多声部音乐主要是采用平行八度、四度、五度的音程关系。因为八度、四度和五度关系是五度相生律中所具有的音程，故由五度相生律中的这三种音程所构成的“复音体”音乐也是自然和协和的，随着复音体音乐的发展，人们就会对这几种音程的音响不满足，很自然地提出“三度”等音程关系的要求，而“三度”音程在五度相生律中却是不协和的。

在西方“纯律大三度”等音程的提出：

英国的奥丁汤（Walter de Odington，1248 – 1316）、德国的弗朗克（Franko von köln，13 世纪时人）、法国的维特里（Philippe de Vitry，1291 – 1361）和米里斯（Johannes de Muris，1300 – 1350）、西班牙的拉莫斯（Bartolomeo Ramos de Pareia，1440 – 1491）等音乐理论家分别提出纯律大小三度和纯律大小六度作为协和音程。[2](179)

真正把纯律的音程作为一种律制的是意大利的音乐理论家扎利诺（Giosephe Zarlino，1517 – 1590），他提出“纯律大音阶”，并在其著作《和声原理》（1558）中，提出了二元论和声学理论[2](183)。即：

把一根弦分为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$各节弦长，就会形成大三和弦的各音；把一根弦加长 2、3、4、5、6 倍，就会形成小三和弦的各音。见下例：

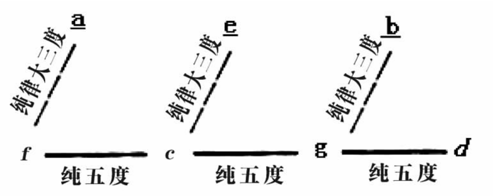



这种大、小三和弦中的各音程以及它们的转位各音程的产生，是单音体音乐发展到多音体音乐的必然。

那么，纯律是如何产生的呢？

缪天瑞《律学》对纯律的解释是：纯律（just intonation）是于五度相生律用以构成的倍音列中的二倍音（即八度）和三倍音（即纯五度）之外，再加入五倍音而构成的一种律制[2](61)。

按照五度相生律，如以 c 为起始律，按照纯五度关系生律，向上就会分别形成 g 、d，向下形成 f，即：f — c — g — d；在 f、c、g 之上分别加入五倍音就可以构成“纯律大三度”（频率比是$\frac{5}{4}$，计 386 音分），见下例：




按照这种方法，所产生的纯律大音阶见下表：

| 序数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 音名 | c | d | e | f | g | a | b | $c^1$ |
| 产生法 | 1 | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{3}\times 2$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$ | 2 |
| 与主音的频率比 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{2}{1}$ |
| 相邻两音间的频率比 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | |
| 相邻两音间的音分值 | 204 | 182 | 112 | 204 | 182 | 204 | 112 | |

从上表可以看出，纯律中的 c、d、f、g 四个律的产生法与五度相生律完全相同，在 c、f、g 三律之上分别乘以$\frac{5}{4}$即得出三个纯律大三度 e、a、b。

纯律有以下几个特点：

1. 最重要的特点是它的三个正三和弦是完全协和的。在正三和弦的结构上，包括纯五度、纯大三度音程，在此基础上，还包括一个纯的小三度音程：

纯五度$\frac{3}{2}$ ÷ 纯的大三度$\frac{5}{4}$ = 纯的小三度$\frac{6}{5}$

2. 纯律有一个最不协和的音程：d—a 之间为窄五度。

五度相生律：f — c — g — d — a — e — b

纯　　　律：f — c — g — d ↙ a — e — b

与五度相生律相比，只有 d—a 这个五度不同，这个五度在纯律中为窄五度，其频率比为（c—a）$\frac{5}{3}$ ÷（c—d）$\frac{9}{8}$ =（d—a）$\frac{40}{27}$，计 680 音分，比纯五度小 12 音分。

在这个“窄五度”中，如果要达到其它纯五度的协和性，所采取的办法无非是将根音或是冠音调高或调低，这样一来，定会造成 g — d 和 a — e 这两个纯五度音程以及所引发的其它音程的协和性的破坏，因此，在纯律中这个

“窄五度”是一个没有办法解决的音程，d — f —a 这个三和弦在作品中是不能用的。

3. 形成频率比为$\frac{9}{8}$和$\frac{10}{9}$两种全音。

$\frac{10}{9}$全音的产生：（c—e）$\frac{5}{4}$ ÷ （c—d）$\frac{9}{8}$ = （d—e）$\frac{10}{9}$

4. 两种全音产生一个“普通音差”：纯律的大、小全音分别为204 音分和182 音分，其音差值为22 音分，这个音差称“普通音差”，即：$\frac{9}{8} \div \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$（22 音分）。

纯律中，凡是用纯律大三度所迭加出的音，都比五度相生律低一个普通音差。

纯律大音阶与五度相生律大音阶对比表：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 五度相生律 | 音分值 | 204 | 204 | 90 | 204 | 204 | 204 | 90 | |
| | 频率比 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | |
| | 音名 | c | d | e | f | g | a | b | $c^1$ |
| 纯律 | 音名 | c | d | e | f | g | a | b | $c^1$ |
| | 频率比 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | |
| | 音分值 | 204 | 182 | 112 | 204 | 182 | 204 | 112 | |

5. 存在纯律大半音（112 音分）

由于纯律的纯八度、纯五度、纯四度、大小三度和大小六度都是协和的，故大大方便于复音体音乐。但二级三和弦由于其“窄五度”音程的存在而变得不协和，而三个正三和弦是很协和的。在欧洲没有真正的实现纯律，而是通过“中庸全音律”来实现纯律的，但它已不是真正意义上的纯律了。

（二）纯律小音阶

从上所述，以纯律大三度作为生律基础可以构成纯律大音阶，而以纯律小三度作为生律基础则可以构成纯律小音阶。

纯律小三度的计算方法：

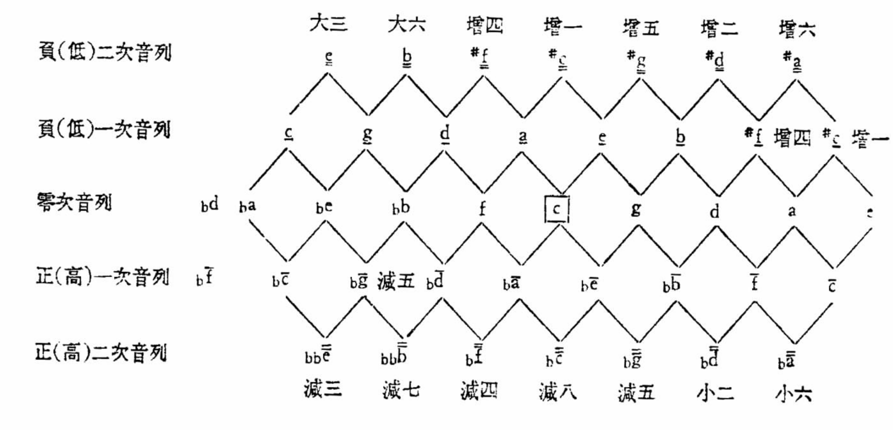
纯五度$\frac{3}{2}$ ÷ 纯大三度$\frac{5}{4}$ = 纯小三度$\frac{6}{5}$，即纯小三度的频率比为$\frac{6}{5}$。


现将纯律小音阶的产生法及音分值列表如下：

| 序数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 音名 | c | d | $^{b}e$ | f | g | $^{b}a$ | $^{b}b$ | $c^1$ |
| 产生法 | 1 | $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{2}{3}\times 2$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}$ | $\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}$ | 2 |
| 与主音的频率比 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{2}{1}$ |
| 相邻两音间的频率比 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | |
| 相邻两音间的音分值 | 204 | 112 | 182 | 204 | 112 | 204 | 182 | |

纯律小音阶与纯律大音阶相比，其骨干音都是 f－c－g－d 四音，且它们相邻两音间的频率比以及音分值的数值都是相同的，即频率比都包括$\frac{9}{8}$、$\frac{16}{15}$、$\frac{10}{9}$三种，音分值也都包括 204、112、182 三种，因此，尽管从排列次序上不相同，但从本质上来说，纯律大音阶与纯律小音阶的相同的。

每个音都可以构成纯律大音阶和纯律小音阶，故就形成了纯律音系网[3]。




（三）纯律大、小音阶中的两种半音

在纯律中，与五度相生律相比，同样存在着“同名半音”与“异名半音”两种半音。

同名半音：

如以 c～$^{\#}$c 为例，c～$^{\#}$c 就是一个同名半音，在一些乐理书中也称为变化半音。我们知道，c～e 为纯律大三度，其频率比为$\frac{5}{4}$，而 e～$^{\#}$c 为纯律小三度，其频率比为$\frac{6}{5}$，c～$^{\#}$c 可以认为 c 上行纯律大三度到 e，然后再下行纯律小三度到$^{\#}$c，所以 c～$^{\#}$c 的频率比为$\frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$，其音分值为

$$\log\left[\frac{25}{24}\right] \times (1200 \div \log 2) = 70.6724268642822171442798980372\,58$$（约 71 音分）

异名半音：

如以 c～$^{b}$d 为例，由 c 下行纯五度到 f、再下行纯大三度，再升高一个八度到$^{b}$d，即 c～$^{b}$d 的频率比为：（下行纯五度）$\frac{2}{3}$ ÷（下行纯大三度）$\frac{5}{4}$ ×（升高一个八度）2 $= \frac{16}{15}$，其音分值为：

$$\log\left[\frac{16}{15}\right] \times (1200 \div \log 2) = 111.731285269777648111299518755\,1$$（约 112 音分）

从以上计算可以得出，纯律的同名半音小于异名半音，这两种半音的频率比为：$\frac{16}{15} \div \frac{25}{24} = \frac{384}{375}$，其音分值为 41.0588584054955476668500538382 54（约 41 音分）。

结语

综观以上论述，在五度相生律和纯律中，都会产生出“同名”和“异名”两种不同的半音，这两种半音是由于这两种律制本身的生律规律所形成的，正是由于这两种半音的存在，才使得同一律制内部和不同律制之间出现了复杂的关系。五度相生律的同名半音为 114 音分，异名半音为 90 音分，两者相差 24 音分；纯律的同名半音为 71 音分，异名半音为 112 音分，两者相差 41 音分。五度相生律的同名半音大于异名半音，而纯律的同名半音却小于异名半音。

在五度相生律中，这两种半音使得变化音级出现了不同的倾向性，即同名半音之间的倾向性较弱，异名半音间的倾向性较强；在纯律中，同样也存在音的倾向性问题，但同名半音之间的倾向性较强，异名半音之间的倾向性较弱。在音乐中的这种倾向性，与这两种半音的本质特征有很密切的关系，这种倾向性也使得这两种律制产生了区别于他律的独特的风格。

**参考文献：**

［1］戴望．管子校注［M］．上海：上海书店出版社，1986：311－312.
［2］缪天瑞．律学［M］．北京：人民音乐出版社，1996.
［3］吴南薰．律学会通［M］．北京：科学出版社，1964.